

Identificação das plantas servo por meio da análise da resposta temporal

O objetivo dessa experiência é obter um modelo dinâmico para descrever a relação entrada/saída (função de transferência) do IP02 e do SRV02 das plantas servo da Quanser. A função de transferência é obtida a partir da equação diferencial que descreve a dinâmica do sistema via transformada de Laplace. A determinação completa do modelo para análise é feita identificando os parâmetros presentes no modelo adotado.

Espera-se ao final do experimento que o aluno saiba:

- Modelar matematicamente o IP02 e o SRV02 utilizando as leis da Física para obter a função de transferência de malha aberta;
- Identificar os parâmetros de um modelo utilizando a resposta temporal do sistema obtida via ensaios práticos.

3.1 Modelagem de sistemas com engrenagens

Sistemas mecânicos em rotação, especialmente aqueles acionados por motores, dificilmente são encontrados sem a associação com trens de engrenagens de acionamento da carga. As engrenagens permitem adequar a relação entre velocidade e torque do sistema de acionamento da carga.

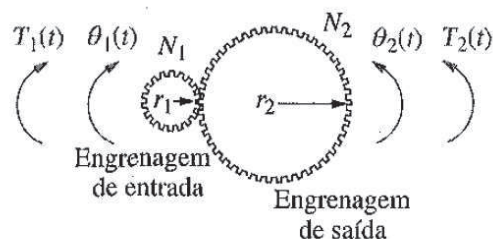


Figura 3.1: Sistema de engrenagens.

A interação entre duas engrenagens é ilustrada na Figura 3.1. Pode-se perceber que a engrenagem de entrada com raio r_1 e N_1 dentes gira de um ângulo $\theta_1(t)$ devido à aplicação do

torque $T_1(t)$, e a engrenagem de saída de raio r_2 e N_2 dentes responde girando de um ângulo $\theta_2(t)$, fornecendo um torque $T_2(t)$. Quando as engrenagens giram, a distância percorrida ao longo da circunferência de cada engrenagem é a mesma, assim

$$r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2$$

ou ainda

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

uma vez que a relação entre os números de dentes ao longo das circunferências está na mesma proporção que a relação entre os raios. Admitindo que as engrenagens não absorvem energia (eficiência de 100%) a energia que entra na engrenagem 1 é igual a energia que sai na engrenagem 2. Sabendo que a energia de rotação se caracteriza pelo produto de um torque por um deslocamento angular, tem-se

$$T_1 \theta_1 = T_2 \theta_2$$

o que implica

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

ou seja, os torques são diretamente proporcionais à relação entre os números de dentes

$$T_2 = \frac{N_2}{N_1} T_1 = K_g T_1$$

No caso de impedâncias mecânicas acionadas por engrenagens, as mesmas podem ser refletidas por meio de trens de engrenagens pela multiplicação da impedância mecânica pela relação

$$\left(\frac{\text{Número de dentes da engrenagem do eixo de destino}}{\text{Número de dentes da engrenagem do eixo de origem}} \right)^2$$

Exemplificando, considere uma caixa de engrenagens acionando uma inércia rotacional, uma mola e um amortecedor viscoso conforme ilustrado na Figura 3.2. Refletindo o torque $T_1(t)$

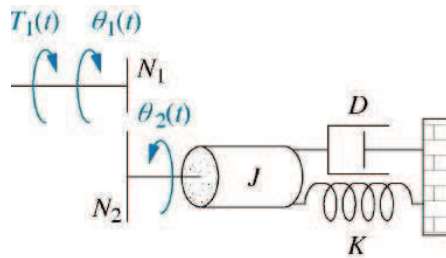


Figura 3.2: Inércia rotacional e impedâncias mecânicas acionadas por engrenagens.

para a saída, a equação de movimento fica

$$(Js^2 + Ds + K)\theta_2(s) = T_1(s) \frac{N_2}{N_1}$$

Escrevendo o deslocamento angular $\theta_2(s)$ em função do deslocamento angular de entrada $\theta_1(s)$ a equação fica

$$(Js^2 + Ds + K) \frac{N_1}{N_2} \theta_1(s) = T_1(s) \frac{N_2}{N_1}$$

que após ser simplificada resulta em

$$\left[J \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 s^2 + D \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 s + K \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \right] \theta_1(s) = T_1(s)$$

que representa a função de transferência equivalente eliminando as engrenagens e refletindo a inércia rotacional e as impedâncias mecânicas para a entrada.

Por último, vale ressaltar que inércias conectadas por engrenagens não possuem movimentos linearmente independentes. Nesse caso, deve-se refletir uma das inércias (e impedâncias mecânicas) para o eixo em que se deseja fazer a análise e somar com as inércias, e impedâncias, presentes nesse eixo para se obter o equivalente.

3.2 Modelagem da planta servo de movimento linear

3.2.1 Modelagem teórica (pré-relatório)

Para obter a função de transferência $G(s)$ que relaciona o sinal de tensão aplicado no sistema e a posição do carro, $G(s) = X(s)/V_m(s)$, considere um modelo dinâmico simplificado conforme apresentado na Figura 3.3, em que $f(t)$ é a força gerada pelo motor CC e $f_b(t)$ é a força de

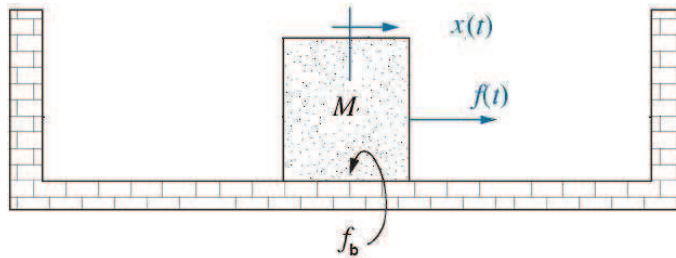


Figura 3.3: Modelo proposto para a planta servo de movimento linear.

atrito viscoso equivalente no pinhão do motor. A força de atrito de Coulomb e a força inercial do circuito de armadura em rotação foram desprezadas.

Seja B_{eq} o coeficiente de atrito viscoso equivalente, determine a equação diferencial que descreve a dinâmica do sistema apresentado na Figura 3.3.

Solução:

A equação diferencial obtida acima relaciona a força gerada pelo motor CC com o deslocamento do carro. Como o interesse é obter $G(s)$, o próximo passo é analisar o circuito elétrico do motor CC, Figura 3.4, para obter uma expressão da força $f(t)$ em função do deslocamento linear $x(t)$ e da tensão de entrada $v_m(t)$.

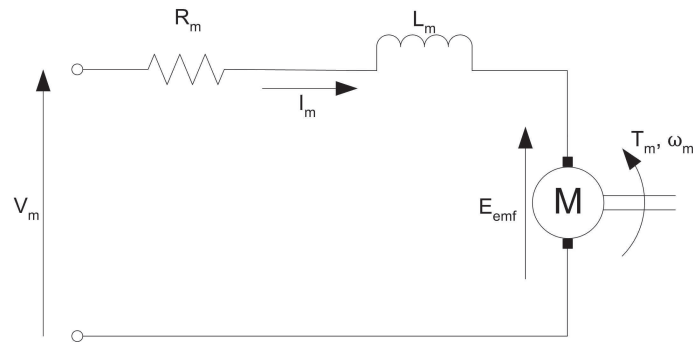


Figura 3.4: Circuito elétrico do motor CC.

Utilizando a lei de Kirchhoff das tensões, obtenha a equação diferencial do circuito da apresentado na Figura 3.4.

Solução:

Sabendo que a força contra-eletromotriz, E_{emf} , é proporcional à velocidade angular do rotor

$$E_{emf} = K_m \omega_m$$

em que K_m é a constante de força contra-eletromotriz, e admitindo-se que a indutância da armadura, L_m , seja pequena quando comparada à sua resistência, R_m , (usual em motores CC) a dinâmica devido à indutância pode ser desprezada, e a expressão da corrente de armadura fica igual a

Solução:

Sabendo que o torque produzido pelo motor CC é proporcional à corrente de armadura

$$T_m = \eta_m K_t I_m \quad (3.1)$$

em que η_m é o rendimento do motor relacionado às perdas elétricas que ocorrem no mesmo, K_t é a constante de torque do motor, e que o torque resultante é igual a força aplicada vezes o braço

de alavanca (no caso o raio do pinhão do motor), tem-se que a força aplicada no carro é dada por

$$F_c = \frac{\eta_g K_g T_m}{r_{mp}} \quad (3.2)$$

em que K_g é a razão de transmissão da caixa de engrenagens, r_{mp} o raio do pinhão do motor e η_g a eficiência da caixa de engrenagens relacionada com as perdas de energia devido à inércia e ao amortecimento das próprias engrenagens. Substituindo (3.12) em (3.2) a expressão da força fica

$$F_c = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t I_m}{r_{mp}} \quad (3.3)$$

Por último, sabendo que a velocidade linear é igual a velocidade angular vezes o raio, e considerando a relação da caixa de engrenagens, a velocidade angular do motor pode ser escrita como

$$\omega_m = \frac{K_g \dot{x}(t)}{r_{mp}} \quad (3.4)$$

Substituindo a expressão encontrada para a corrente na armadura em (3.3), em seguida o valor de ω_m por (3.4) a expressão da força que atua no carro fica



Finalmente, substituindo a expressão encontrada acima na função de transferência do modelo proposto na Figura 3.3 obtém-se $G(s)$ igual a



3.2.2 Modelagem experimental (laboratório)

O modelo proposto e estudado na subseção anterior para o IP02 é um modelo de segunda ordem sem zeros finitos. Modelos desse tipo podem ser completamente caracterizados por dois parâmetros, o fator de amortecimento, ξ , e a frequência natural, ω_n , sendo que ambos se relacionam diretamente com os parâmetros físicos da planta estudada. A depender dos valores de ξ e ω_n , a resposta de um sistema de segunda ordem com pólos no semi-plano esquerdo, incluindo o

eixo imaginário, pode ser oscilatória (sem amortecimento), subamortecida, criticamente amortecida ou superamortecida, conforme ilustrado na Figura 3.5 para uma entrada degrau unitário.

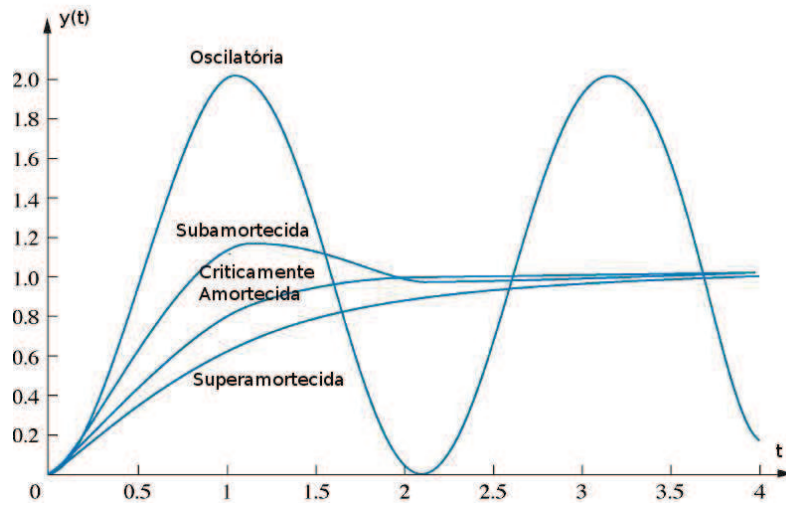


Figura 3.5: Respostas ao degrau para o caso de sistemas de segunda ordem amortecidos.

O objetivo da parte experimental é identificar os parâmetros desse modelo baseado na resposta transitória devido a uma entrada do tipo degrau. Com o intuito de obter uma função de transferência na forma geral

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

a estrutura mostrada na Figura 4.2 será utilizada para a identificação dos parâmetros.

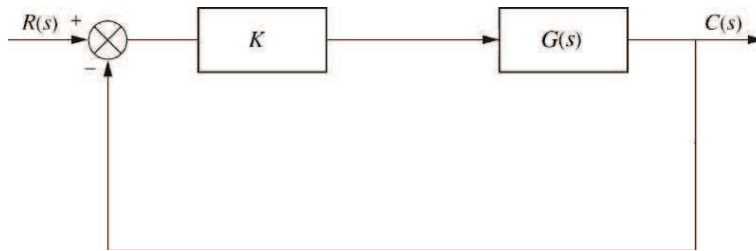


Figura 3.6: Configuração em malha fechada para identificação.

A função de transferência $G(s)$, obtida no pré-relatório, possui a seguinte forma geral

$$G(s) = \frac{a}{bs^2 + cs}$$

em que a , b e c dependem dos parâmetros físicos da planta (eficiência da caixa de engrenagens e do motor, coeficiente de atrito viscoso, resistência de armadura, massa total do conjunto, raio do pinhão do motor, razão ds engrenagens, etc). Fechando a malha conforme mostrado na Figura 4.2, obtém-se a seguinte função de transferência equivalente

$$H(s) = \frac{Ka}{bs^2 + cs + Ka} = \frac{\frac{Ka}{b}}{s^2 + \frac{c}{b}s + \frac{Ka}{b}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

logo,

$$\omega_n^2 = \frac{Ka}{b}, \quad 2\xi\omega_n = \frac{c}{b}$$

Sabendo que o tempo do primeiro pico, T_p , (tempo necessário para se atingir o valor máximo da resposta) é dado para sistemas de segunda ordem subamortecidos pela expressão

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.5)$$

e que o sobrevalor percentual (o quanto a forma de onda ultrapassa o valor em regime estacionário, no tempo de pico, expresso como um percentual do valor final) é dado por

$$\%SP = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (3.6)$$

em que

$$\%SP = \frac{y_{max} - y_{final}}{y_{final}} 100$$

é possível obter o fator de amortecimento e a frequência natural do sistema e, conseqüentemente, os valores de a , b e c , analisando simplesmente a resposta ao degrau unitário no domínio do tempo. Perceba que o fator de amortecimento pode ser diretamente obtido de (3.6) aplicando o logaritmo natural

$$\xi = \frac{-\ln\left(\frac{\%SP}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{\%SP}{100}\right)}} \quad (3.7)$$

Procedimento

- No Simulink abra o modelo *identifica_IP01_2.mdl*. Ele contém três subsistemas conectados de maneira similar ao mostrado na Figura 4.2, um com o subsistema real do IP02, e dois com os modelos teórico (obtido no pré-relatório) e experimental (a ser determinado). Existem três possibilidades para o sinal de entrada, um degrau, uma onda quadrada e uma onda quadrada aleatória. Os dados da resposta são exportados para o *workspace* para análise posterior;
- Rode o *script setup_lab_IP01_2.m*. Ele carrega os valores de todos os parâmetros e variáveis utilizadas pelo diagrama do Simulink;
- Aterre as entradas dos modelos teórico e experimental (chaves manuais no diagrama), selecione a entrada degrau (configure o bloco de seleção de entrada para 3) e o tempo de simulação para 1 segundo;
- Compile e execute o sistema em tempo real (marque a posição inicial para repetir o experimento durante a validação). Observe se o trilho se movimenta, e em caso afirmativo repita o procedimento fixando a plataforma. Atenção, verifique se o ganho do VoltPAQ está definido como 1 e não esqueça de desligar o amplificador de potência ao término do experimento;

- Salve os dados exportados em arquivo `.mat` (eles serão utilizados na elaboração do relatório). Com os dados no `workspace`, plote a resposta no domínio do tempo e obtenha graficamente o valor do tempo de pico e o sobrevalor percentual;
- Calcule o fator de amortecimento, a frequência natural e o ganho em regime estacionário do sistema. Crie, respectivamente, as variáveis `qsi`, `wn` e `K` no `workspace` e salve-as em arquivo `.mat`;
- Com as novas variáveis `qsi`, `wn` e `K` definidas no `workspace`, conecte os modelos teórico e experimental (chaves manuais) e execute o sistema em tempo real. Salve os dados exportados (`output_real`, `output_teorico` e `output_experimental`) para a elaboração do relatório;
- Valide o sistema identificado experimentalmente comparando a sua resposta ao degrau com os dados salvos da resposta real (Matlab). Atenção, o degrau aplicado tem amplitude igual a $15mV$;
- Repita o item anterior, mas agora considerando a onda quadrada como entrada (configure o bloco de seleção de entrada para 1) e um tempo de simulação de 10 segundos.

3.3 Modelagem da planta servo de movimento rotatório

3.3.1 Modelagem teórica (pré-relatório)

A relação entre a velocidade angular do eixo de carga e o sinal de tensão aplicado nos terminais do motor CC pode ser descrita por uma função de transferência de primeira ordem dada por

$$\frac{\Omega_l(s)}{V_m(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

em que $\Omega_l(s)$ é a transformada de Laplace da velocidade angular do eixo de carga, $V_m(s)$ a transformada de Laplace do sinal de tensão aplicado no motor, K o ganho em regime estacionário e τ a constante de tempo do sistema. O circuito da armadura do motor CC junto com o trem de engrenagens é ilustrado na Figura 3.7.

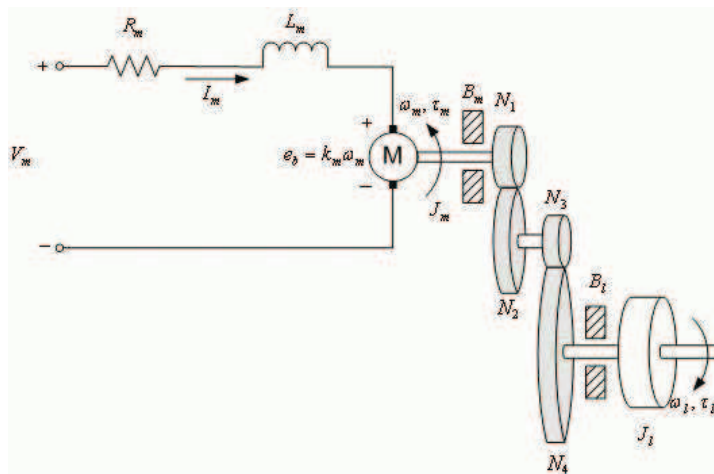


Figura 3.7: Motor CC do SRV02 junto com o trem de engrenagens.

Utilizando a lei de Kirchhoff das tensões obtenha a expressão da corrente de armadura sabendo que a força contra-eletromotriz, $e_b(t)$, é proporcional à velocidade angular do rotor

$$e_b(t) = K_m \omega_m(t)$$

e admitindo-se que a indutância da armadura, L_m , seja pequena quando comparada à sua resistência, R_m , (usual em motores CC), ou seja, a dinâmica devido à indutância pode ser desprezada (utilize a caixa cinza para escrever sua resposta).



A equação diferencial para o movimento rotatório da carga é

$$J_l \dot{\omega}_l(t) + B_l \omega_l(t) = T_l(t) \quad (3.8)$$

em que J_l é o momento de inércia da carga e T_l é o torque total aplicado na carga. A inércia da carga inclui a inércia das engrenagens e de qualquer carga externa conectada ao sistema (no caso desse experimento inclui a inércia do disco).

A equação diferencial que descreve a dinâmica no eixo do rotor é dada por

$$J_m \dot{\omega}_m(t) + B_m \omega_m(t) + T_{ml} = T_m(t) \quad (3.9)$$

em que J_m é o momento de inércia do motor e T_{ml} é o torque resultante atuando no eixo do rotor devido à carga. O torque na carga devido ao torque aplicado pelo motor é dado por

$$T_l(t) = \eta_g K_g T_{ml}(t) \quad (3.10)$$

em que K_g é a razão de transmissão da caixa de engrenagens e η_g a eficiência da caixa de engrenagens relacionada com as perdas de energia devido à inércia e ao amortecimento das próprias engrenagens. Para o sistema em análise, a razão de transmissão da caixa de engrenagem é dada por

$$K_g = \frac{N_4 N_2}{N_3 N_1}$$

Sabendo que o deslocamento angular da carga também é obtido pela relação do trem de engrenagens, ou seja

$$\theta_m(t) = K_g \theta_l(t)$$

a velocidade angular pode ser obtida derivando a relação acima em relação ao tempo, o que fornece

$$\omega_m = K_g \omega_l(t) \quad (3.11)$$

Utilizando as equações obtidas anteriormente, determine a equação diferencial que descreve o movimento do eixo de carga devido a um torque aplicado pelo motor. Em outras palavras,

determine o momento de inércia equivalente, J_{eq} , e o coeficiente de atrito viscoso equivalente, B_{eq} , na expressão abaixo

$$J_{eq}\dot{\omega}_l(t) + B_{eq}\omega_l(t) = \eta_g K_g T_m(t)$$

Solução:

Por último, sabendo que o torque produzido pelo motor CC é proporcional à corrente de armadura

$$T_m = \eta_m K_t I_m \quad (3.12)$$

em que η_m é o rendimento do motor relacionado às perdas elétricas que ocorrem no mesmo e K_t a constante de torque do motor, utilize as equações elétricas e mecânicas obtidas anteriormente e determine a função de transferência que relaciona a tensão aplicada no motor e a velocidade angular no eixo de carga. Em outras palavras determine o ganho em regime permanente, K , e a constante de tempo τ , na expressão abaixo

$$\frac{\Omega_l(s)}{V_m(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Solução:

3.3.2 Modelagem experimental (laboratório)

O modelo proposto e estudado na subseção anterior para o SRV02 é um modelo de primeira ordem sem zeros finitos. Modelos desse tipo podem ser completamente caracterizados por um

parâmetro, a constante de tempo (τ), que se relaciona diretamente com os parâmetros físicos da planta estudada. A constante de tempo representa o tempo necessário para a resposta ao degrau atingir 63% de seu valor final.

O objetivo da parte experimental é identificar o parâmetro desse modelo baseado na resposta transitória devido a uma entrada do tipo degrau. A função de transferência $G(s)$, obtida no pré-relatório, possui a seguinte forma geral

$$G(s) = \frac{\Omega_l(s)}{V_m(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

A partir da resposta no tempo, mede-se a constante de tempo, isto é, o tempo para a amplitude atingir 63% do seu valor final, ou ainda pela inclinação inicial do gráfico da resposta no tempo conforme ilustrado na Figura 3.8. Para se obter K , verifica-se o valor da resposta em regime permanente (teorema do valor final).

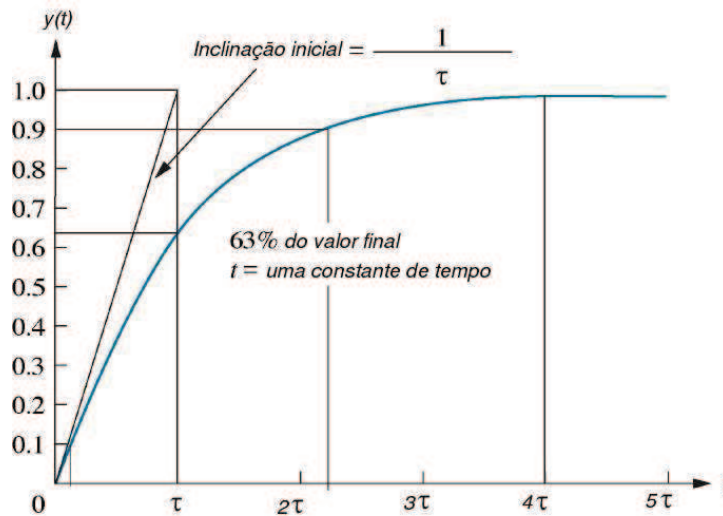


Figura 3.8: Resposta de um sistema de primeira ordem a um degrau unitário.

Procedimento

- No Simulink abra o modelo *identifica_SRV02.mdl*. Ele contém três subsistemas, um com o sistema real do IP02, e dois com os modelos teórico (obtido no pré-relatório) e experimental (a ser determinado). Existem duas possibilidades para o sinal de entrada, um degrau e uma onda quadrada. Os dados da resposta são exportados para o *workspace* para análise posterior;
- Rode o *script setup_lab_SRV02_identifica.m*. Ele carrega os valores de todos os parâmetros e variáveis utilizadas pelo diagrama do Simulink;
- Aterre as entradas dos modelos teórico e experimental (chaves manuais no diagrama), selecione a entrada degrau (configure o bloco de seleção de entrada para 2) e o tempo de simulação para 0,3 segundos;

- Compile e execute o sistema em tempo real. Atenção, verifique se o ganho do VoltPAQ está definido como 1 e não esqueça de desligar o amplificador de potência ao término do experimento;
- Salve os dados exportados em arquivo `.mat` (eles serão utilizados na elaboração do relatório). Com os dados no *workspace*, plote a resposta no domínio do tempo e obtenha graficamente o valor da constante de tempo (τ), e do ganho em regime permanente (K). Crie as variáveis `tau_exp` e `K_exp` no *workspace*;
- Valide o sistema identificado experimentalmente comparando a sua resposta ao degrau com os dados salvos da resposta real (Matlab). Atenção, o degrau aplicado tem amplitude igual a $1,5V$;
- Com as novas variáveis `tau_exp` e `K_exp` definidas no *workspace*, conecte os modelos teórico e experimental (chaves manuais) e execute o sistema em tempo real. Salve os dados exportados (`output_real`, `output_teorico` e `output_experimental`) para a elaboração do relatório;
- Repita o item anterior, mas agora considerando a onda quadrada como entrada (configure o bloco de seleção de entrada para 1) e tempo de simulação para 10 segundos.

3.4 Exercícios para o relatório

Com os dados obtidos no laboratório discorra sobre os seguintes itens.

- 1) Apresente os gráficos das respostas ao degrau e à onda quadrada obtidas no experimento para os três casos: sistema real, modelo teórico e modelo experimental. Avalie a precisão do modelo apresentando algumas razões para o mesmo não representar o sistema real com uma precisão maior.
- 2) A resposta do sistema real apresentou alguma característica não esperada próximo do valor em regime estacionário? Em caso afirmativo apresente uma possível justificativa para o comportamento observado.
- 3) Discuta eventuais problemas enfrentados durante o experimento e como os mesmos foram solucionados.