Análise Dinâmica Linear

Aula 01

Sistemas Dinâmicos - Introdução Geral

Sistemas Dinâmicos

O que se entende por sistema dinâmico?

- Conjunto de objetos agrupados por alguma interação, ou interdependência, de modo que existam relações, tais como de causa e efeito, nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto.
- Utilizando as leis naturais tem-se a noção de como o processo físico se comporta criando-se um conceito de realidade dependente do modelo (geralmente de natureza matemática) com um conjunto de regras que conectam elementos do modelo às observações (Stephen Hawking e Leonard Mdlodinow);

$\rightsquigarrow$ Exemplo: sistema elétrico

- Conjunto de objetos: resistores, capacitores, indutores, etc.
- Relação de causa e efeito: tensão/corrente - leis de Kirchhoff.

Sistemas Dinâmicos

Exemplos do propósito da análise de sistemas dinâmicos

- Projetos de engenharia.
  - Exemplo: construção de um satélite artificial.
- Explicar o funcionamento de um processo físico.
  - Exemplo: caracterização das leis do universo nos níveis macro e micro.
- Auxílio na tomada de decisão (muito cuidado!).
  - Exemplo: Aprendizado a partir de dados.

Em resumo:

- O objetivo é fornecer um bom modelo, como por exemplo: conter poucos elementos arbitrários ou ajustáveis; concordar com e explicar as observações existentes (Stephen Hawking e Leonard Mdlodinow).

Modelos Matemáticos

Possibilidades para se obter modelos matemáticos

- Forma teórica:
  - Modelo desenvolvido aplicando-se os princípios básicos da Física e/ou Química. Essa opção é conhecida como modelagem fenomenológica, ou ainda modelagem caixa branca. Nesse caso, faz-se necessário conhecer a fundo o sistema a ser modelado, e as relações matemáticas que descrevem os fenômenos envolvidos.
- Forma empírica:
  - Usa a observação direta dos dados operacionais do processo obtidos por meio de experimentações. Nesse caso, sinais de entrada e saída do sistema são registrados e submetidos a uma análise para se inferir um modelo. Essa opção é chamada de identificação de sistemas, ou modelagem caixa preta.

Modelos Matemáticos

Possibilidades para se obter modelos matemáticos

- Forma teórica + empírica:
  - Modelo desenvolvido combinando os métodos teórico e empírico, aplicando técnicas de identificação para estimar os parâmetros desconhecidos de modelos gerados teoricamente.

Importante:

- A equação ou o conjunto de equações que compõe o modelo é uma aproximação do processo real. O modelo não consegue incorporar todas as características do processo real. Deve-se normalmente buscar um compromisso entre o custo de se ter o modelo, e o nível de detalhes do mesmo, bem como os benefícios esperados de sua aplicação.
- O propósito do modelo determina, em última análise, sua precisão!

Classificação dos Sistemas Dinâmicos

Categorias para classificação dos sistemas dinâmicos:

1. Sistemas lineares e não lineares;
2. Sistemas variantes ou invariantes no tempo;
3. Sistemas instantâneos ou dinâmicos;
4. Sistemas causais ou não causais;
5. Sistemas contínuos ou discretos no tempo;
6. Sistemas a parâmetros concentrados ou distribuídos;
7. Sistemas determinísticos ou estocásticos.

Importante

- Existem mais categorias que serão consideradas em outras disciplinas.

Classificação dos Sistemas Dinâmicos

Sistemas lineares e não lineares:

- Seja um sistema representado pelo operador matemático $L[\cdot]$, ou seja, a resposta do sistema a uma entrada u é a saída $y = L[u]$.
- O sistema $L[\cdot]$ é dito linear se, quaisquer que sejam os sinais u_1 e u_2, a resposta do sistema à entrada $u = k_1u_1 + k_2u_2$ é dada por

$$L[k_1u_1 + k_2u_2] = k_1L[u_1] + k_2L[u_2]$$

$\leadsto$ Princípio da superposição.

- Linearidade implica em:

  1^o Aditividade: $L[u_1 + u_2] = L[u_1] + L[u_2]$.
  2^o Homogeneidade: $L[ku] = kL[u]$.

- Um sistema que não verifique qualquer uma dessas propriedades é dito não-linear.
- Exemplo: verificar que o sistema abaixo é linear.

$$\dot{y} + 3y = u$$

Classificação dos Sistemas Dinâmicos

Sistemas variantes ou invariantes no tempo:

- Sistemas cujos parâmetros não são alterados com o tempo são chamados invariantes no tempo, ou ainda sistemas com parâmetros constantes.
- Sistemas invariantes no tempo, sob as mesmas condições iniciais, respondem da mesma maneira a um dado sinal de entrada, independentemente de quando tal sinal é aplicado.
- As características de um sistema invariante não muda ao longo do tempo.
- Em caso contrário, o sistema é dito variante no tempo.

Classificação dos Sistemas Dinâmicos

Sistemas instantâneos ou dinâmicos:

- Um sistema é dito instantâneo (ou sem memória) se sua saída a qualquer instante “t” depender, no máximo, de suas entradas no mesmo instante “t” e não de qualquer valor passado ou futuro das entradas.
- Em caso contrário, o sistema é dito dinâmico (ou com memória).
- Exemplos:
  - Sistema instantâneo: circuito puramente resistivo.
  - Sistema dinâmico: circuito RC.
- Os sistemas instantâneos são um caso particular de sistemas dinâmicos.

Classificação dos Sistemas Dinâmicos

Sistemas causais ou não causais:

- Um sistema é dito causal se sua saída a qualquer instante "t_0" depender apenas do valor de sua entrada $u(t)$ para $t \leq t_0$. Em outras palavras, o valor da saída no instante presente depende apenas do valor presente e passado da entrada, e não de seus valores futuros.
- Um sistema que viola a condição de causalidade é chamado de sistema não causal (ou antecipativo).
- Importante:
  - Qualquer sistema prático que opera no tempo real deve, necessariamente, ser causal. Sistemas não causais não são realizáveis em tempo real.

Classificação dos Sistemas Dinâmicos

Sistemas contínuos ou discretos no tempo:

- Um sistema é de tempo contínuo se o tempo “t” é um número real. Normalmente toma-se $t \in \mathbb{R}_+$, ou seja, assume-se que “t” é um número real não-negativo.
- A evolução de um sistema de tempo contínuo é governada por uma ou mais equações diferenciais.
- Um sistema é de tempo discreto se o tempo “t” é um número inteiro. Normalmente toma-se $t \in \mathbb{Z}_+$.
- A evolução de um sistema de tempo discreto é governada por uma ou mais equações de diferenças.

Classificação dos Sistemas Dinâmicos

Sistemas a parâmetros concentrados ou distribuídos:

- Um sistema a parâmetros concentrados é aquele em que a variável dependente é função apenas de uma variável independente. Uma equação diferencial escrita em termos de uma única variável independente é chamada de equação diferencial ordinária.
  - Exemplo: circuito oscilatório LC:

$$v_c(t) + LC\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} = 0$$

- Modelos a parâmetros concentrados descrevem o comportamento do sistema em um único ponto do espaço.
- Em sistemas a parâmetros distribuídos, além de um dependência temporal, existe uma dependência espacial, o que leva a um modelo descrito por uma equação diferencial parcial.
  - Exemplo: variação de tensão em uma linha de transmissão ideal:

$$LC\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Classificação dos Sistemas Dinâmicos

Sistemas determinísticos e estocásticos:

- Um sistema é dito determinístico se para uma dada condição inicial e uma dada entrada houver apenas uma única saída possível.
- Em caso contrário, o sistema é dito estocástico.
- O termo sistemas estocásticos refere-se, em geral, a sistemas em que as entradas e/ou coeficientes possuem comportamentos aleatórios sendo descritos em termos de distribuições de probabilidade, envolvendo médias e variâncias.

Fundamentos Necessários em ADL

Pré-requisitos:

- Equações diferenciais ordinárias lineares;
- Série de potência, representação de uma função em série de Taylor;
- Relações trigonométricas básicas;
- Integrais e derivadas fundamentais.

Próxima aula:

- Modelagem de sistemas dinâmicos.
- Sistemas mecânicos em translação.
- Função de transferência.