· ADL - Aula 20/21

Discrete-time control systems
K. Ogata
Cap. 2 e 3

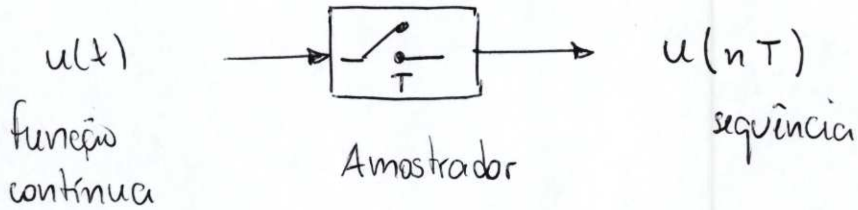
Sistemas discretos no tempo

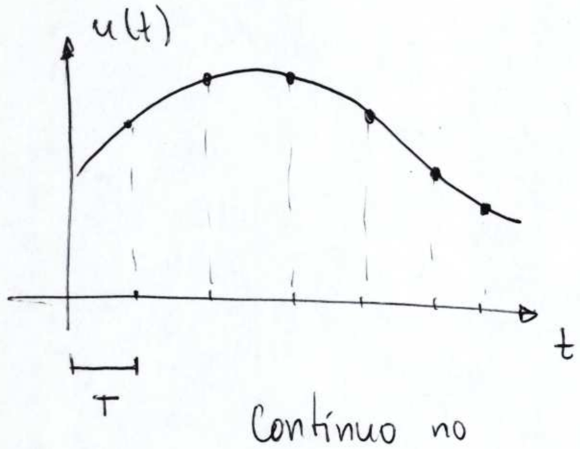
- Um sinal em tempo discreto é basicamente uma sequência de números.
- Sistemas cujas entradas e saídas são sinais em tempo discreto são chamados de sistemas em tempo discreto, ou sistemas discretos.

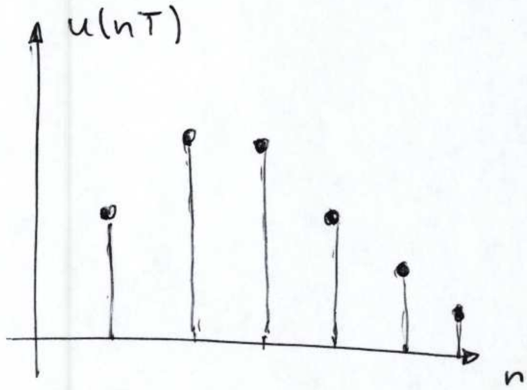
  Exemplos: Modelos populacionais, modelos de rendimento, rastreamento por radar, etc.
- Um sistema discreto processa uma sequência de números $x[n]$ resultando em outra sequência $y[n]$ na saída.

Amostragem e digitalização

Amostragem é a transformação do sinal contínuo no tempo em um sinal discreto.



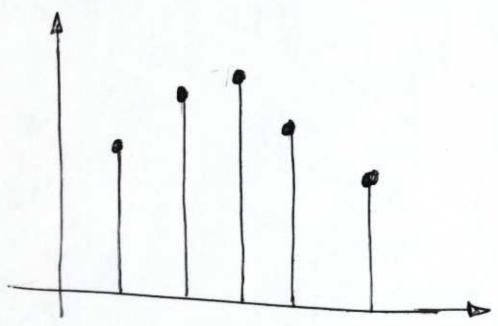


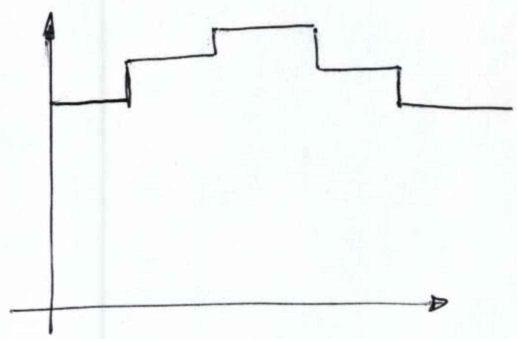


Contínuo no tempo

Discreto no tempo

Digitalização : amostragem + retenção + quantização





Exemplo (Aplicação financeira)

Uma pessoa faz regularmente um depósito (entrada) em um banco a um intervalo T (por exemplo um mês). O banco paga um certo juros durante o período T e envia periodicamente uma correspondência com o saldo ao depositante. Determine a equação que relaciona a saída y[n] (saldo) com a entrada x[n] (depósito).

$x[n]$: depósito feito no n-ésimo instante

$y[n]$: saldo no n-ésimo instante calculado imediatamente após o recebimento de $x[n]$

r : taxa de juros por período T

$$y[n] = y[n-1] + r\,y[n-1] + x[n]$$
$$= (1+r)\,y[n-1] + x[n]$$

ou ainda

$$y[n] - a\,y[n-1] = x[n] \quad , \quad a = 1+r$$

ou ainda

$$y[n+1] - a\,y[n] = x[n+1]$$

↳ operador avanço (não causal)

Exemplo (Diferenciador Digital)

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow \text{contínuo no tempo}$$

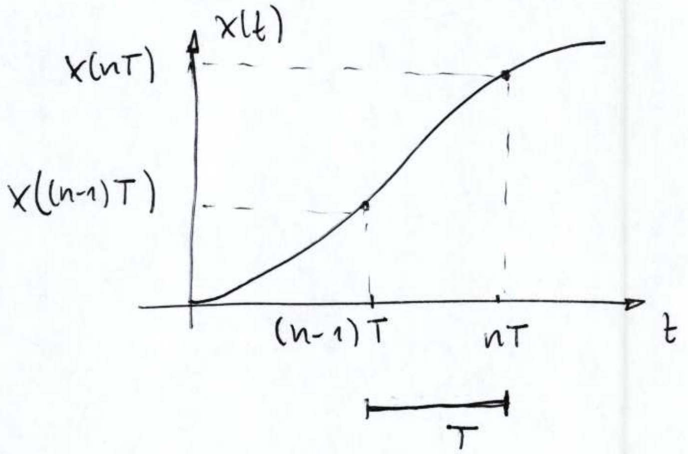
$$x[n] = x(nT)$$

↳ período de amostragem

$$y[n] = y(nT) = \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=nT}$$

$$y[n] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{T \to 0} \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T}$$



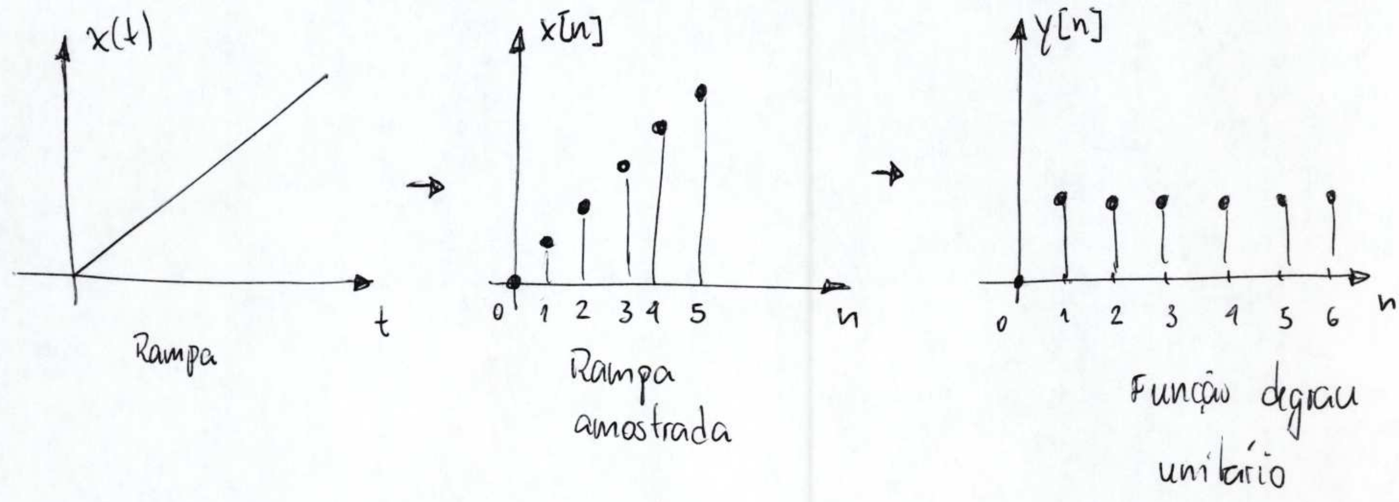
- Utilizando a notação para sinais discretos

$$y[n] = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T}\left(x[n] - x[n-1]\right)$$

Assumindo o período de amostragem suficientemente pequeno

$$y[n] = \frac{1}{T}\left(x[n] - x[n-1]\right)$$

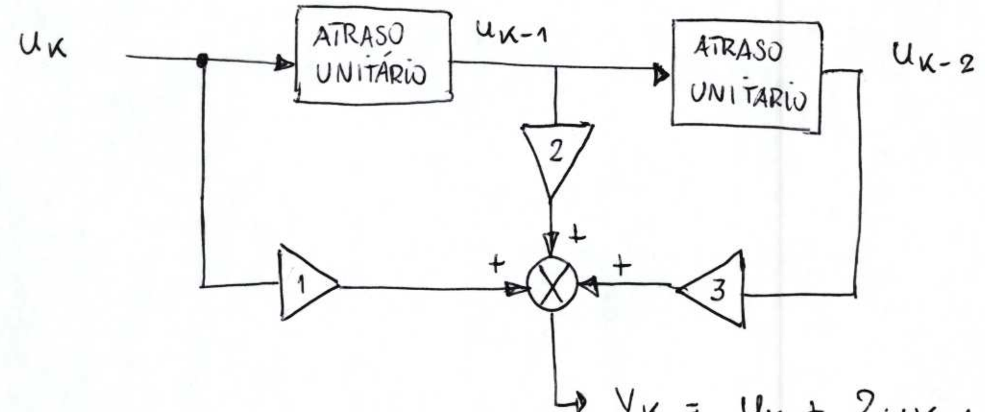
Se a entrada for uma rampa, $x(t) = t$



Equações de Diferenças

Transformam sequências de entrada em sequências de saída de acordo com alguma relação que involve instantes discretos no tempo.

Exemplo:



$$y_k = u_k + 2u_{k-1} + 3u_{k-2}$$

Determine a saída y_k para uma entrada

$$u_k = \{1, 0, 1, 2, 0, 0, \dots\}$$

$$y_1 = u_1 = 1$$

$$y_2 = u_2 + 2u_1 = 0 + 2 = 2$$

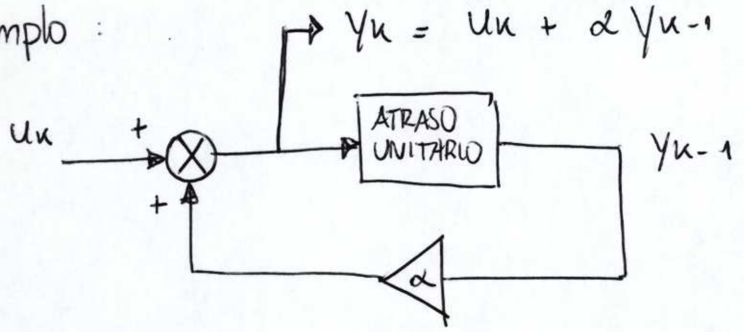
$$y_3 = u_3 + 2u_2 + 3u_1 = 1 + 0 + 3 = 4$$

$$y_4 = u_4 + 2u_3 + 3u_2 = 2 + 2 + 0 = 4$$

$$y_5 = u_5 + 2u_4 + 3u_3 = 0 + 4 + 3 = 7$$

$$y_k = \{1, 2, 4, 4, 7, \dots\}$$

Exemplo :



$u_k = 1 \,, \quad k \geq 0$ (degrau unitário)

Seja $y[-1] = 0$, qual o valor de y_k para todo k?

$$y_0 = u_0 + \alpha y_{-1} = 1$$

$$y_1 = u_1 + \alpha y_0 = 1 + \alpha$$

$$y_2 = u_2 + \alpha y_1 = 1 + \alpha + \alpha^2$$

$$\vdots$$

$$y_k = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^k$$

$$y_k = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{k+1} - 1}{\alpha - 1} \,, & \alpha \neq 1 \\ k+1 \,, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Soma de "n" termos de uma PG : $S_n = \dfrac{a_n q - a_1}{q - 1}$