ADL - aula 25/26

Transformada Z Inversa

- Pode-se obter uma fórmula para a transformada Z inversa a partir do teorema dos resíduos

(TEOREMA DOS RESÍDUOS) Seja $X(z)$ uma função complexa analítica dentro de um contorno fechado C e no próprio contorno, exceto num número finito K_i de pontos singulares p_k no interior de C. Nesse caso, vale a seguinte igualdade

$$\oint_C X(z)\,dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{K_i} \underset{z=p_k}{\text{res}}\{X(z)\},$$

com a integral calculada ao longo de C, no sentido anti-horário. Se p_k é um pólo de $X(z)$ com multiplicidade m_k, isto é, $X(z)$ pode ser escrita como

$$X(z) = \frac{P_k(z)}{(z-p_k)^{m_k}}$$

em que $P_k(z)$ é analítica em $z = p_k$, então o resíduo de $X(z)$ com respeito a p_k é dado por

$$\underset{z=p_k}{\text{res}}\{X(z)\} = \frac{1}{(m_k-1)!}\,\frac{d^{(m_k-1)}[(z-p_k)^{m_k}X(z)]}{dz^{(m_k-1)}}\bigg|_{z=p_k}$$

Nota: Função analítica é uma função que pode ser localmente expandida em série de Taylor.

Usando o teorema dos resíduos é possível mostrar que, se C é um percurso fechado anti-horário envolvendo a origem do plano z, então

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1}\, dz = \begin{cases} 0, & \text{para } n \neq 0 \\ 1, & \text{para } n = 0 \end{cases}$$

e assim podemos deduzir a transformada Z inversa de $X(z)$ por

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)\, z^{k-1}\, dz \qquad (1)$$

em que C é um percurso fechado anti-horário na região de convergência de $X(z)$.

<u>Demonstração</u>:

Como $$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, z^{-k},$$

expressando $x[k]$ conforme (1) e trocando a ordem entre a integração e o somatório, temos que

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\, z^{k-1}\, dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} \cdot z^{k-1}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \oint_C z^{-n+k-1}\, dz$$

$$= x[k].$$

pois $$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{-n+k-1}\, dz = \begin{cases} 0, & -n+k \neq 0 \Rightarrow n \neq k \\ 1, & -n+k = 0 \Rightarrow n = k \end{cases}$$

A seguir 2 técnicas para a realização do cálculo da transformada Z inversa em casos ~~mais~~ práticos.

→ Cálculo baseado na expansão em frações parciais, utilizado sempre que $X(z)$ pode ser expresso como uma razão de polinômios, ou seja,

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

→ Cálculo baseado na expansão em série, utilizado quando a transformada Z não é expressa por uma razão de polinômios. Neste caso podemos tentar efetuar sua inversão usando uma expansão em série de Taylor em torno de zero.

Calcule a transformada Z inversa de

$$X(z) = \ln\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right)$$

considerando a sequência unilateral (causal).

Seja $x = z^{-1}$ e considere a expansão em série de Taylor em torno de zero de $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$, ou seja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=0} = f(0) + x \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} + \frac{x^2}{2!} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=0} + \dots$$

Logo

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0 + \left.\frac{(1-x)}{(1-x)^2}\right|_{x=0} \cdot x + \left[\frac{-(1-x)^2 - (1-x)(-2(1-x))}{(1-x)^4}\right]\Bigg|_{x=0} \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$= 0 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

ou seja,

$$\ln\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right) = z^{-1} + \frac{z^{-2}}{2} + \frac{z^{-3}}{3} + \frac{z^{-4}}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n}$$

Portanto, por inspeção $x[n] = \frac{1}{n} u(n-1)$.

$\boxed{\text{ROC}}$ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{-n}}{n}\right|^{1/n} = |z^{-1}| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\right|^{1/n} = |z^{-1}| \Rightarrow |z| > 1$