Transformada Z - Propriedades

ADL
aula 25/24

Ref. Applied Laplace Transform an Z-Transforms for Scientists and Engineers. (Pag. 95)

Regra da Divisão

Seja $f(k)$ uma sequência com $f(0)=0$ e transformada Z $F(z)$.
Queremos calcular $f(k)/k$.

Para qualquer imagem em Z, $Y(z)$, temos

$$\int_z^\infty Y'(\xi)\,d\xi = Y(\infty) - Y(z) = y(0) - Y(z)$$

(Última igualdade pelo Teorema do valor inicial).

Seja $y(k) = f(k)/k$, $k>0$ e $y(0) := 0$, então $f(k) = k\,y(k)$

Logo $\mathcal{Z}\{f(k)\} = -z\,Y'(z) = F(z) \Rightarrow Y'(z) = -\dfrac{F(z)}{z}$

(Prop. Multiplicação por k)

Assim, pelo mesmo raciocínio acima,

$$Y(z) = y(0) - \int_z^\infty Y'(\xi)\,d\xi = \int_z^\infty \frac{F(\xi)}{\xi}\,d\xi$$

O que implica que, se $\mathcal{Z}\{f(k)\} = F(z)$ e $f(0)=0$, então

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{f(k)}{k}\right\} = \int_z^\infty \frac{F(\xi)}{\xi}\,d\xi$$

Exemplo: Seja $f(k) = \dfrac{u(k-1)\, a^k}{k}$ (Generalização da função do exemplo da última aula)

Sabemos

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = \frac{a}{z-a},$$

logo

$$\int_z^{\infty} \frac{a}{\xi(\xi - a)}\, d\xi = \int_z^{\infty} \left(\frac{1}{\xi - a} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi$$

$$= \ln\left(\frac{\xi - a}{\xi}\right)\Bigg|_z^{\infty}$$

$$= 0 - \ln\left(\frac{z-a}{z}\right)$$

Para $a = 1$ temos o caso do exemplo da última aula da sequência $\frac{1}{k}$, $k \geq 1$.