ADL - Aula 24/25

Sobre a Convergência da Transformada Z

A transformada Z de uma sequência é uma série de Laurent na variável complexa z, ou seja, é do tipo

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad \rightarrow \text{Generaliza a série de Taylor}$$

com

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz . \quad \rightarrow \text{Generaliza a integral de Cauchy}$$

Logo, todas as propriedades da série de Laurent se aplicam diretamente à transformada Z.

Em geral, pode-se utilizar um resultado da teoria de séries que diz que, dada uma série na variável complexa z

$$S(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(z)$$

tal que

$$|f_i(z)| < \infty, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

e dada a quantidade

$$a(z) = \lim_{n \to \infty} |f_n(z)|^{1/n}$$

$\rightarrow \sum_n |a_n| < \infty$

então a série converge absolutamente se $a(z) < 1$, e diverge se $a(z) > 1$. Note que $a(z) = 1$ o teste não diz nada!

Para o caso de séries bilaterais

$$S(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i(z)$$

se expressarmos $S(z)$ como a soma de duas séries, $S_1(z)$ e $S_2(z)$, tais que

$$S_1(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(z) \quad e \quad S_2(z) = \sum_{i=-\infty}^{-1} f_i(z)$$

então $S(z)$ converge se as dua séries $S_1(z)$ e $S_2(z)$ convergem.

Logo, faz-se necessário o cálculo de

$$a_1(z) = \lim_{n \to \infty} |f_n(z)|^{1/n} \quad e \quad a_2(z) = \lim_{n \to -\infty} |f_n(z)|^{1/n}.$$

Aplicando este resultado na equação da transformada z, conclui-se que a mesma converge se

$$a_1 = \lim_{n \to \infty} |x(n) z^{-n}|^{1/n} = |z^{-1}| \lim_{n \to \infty} |x(n)|^{1/n} < 1 \qquad (1)$$

$$a_2 = \lim_{n \to -\infty} |x(n) z^{-n}|^{1/n} = |z^{-1}| \lim_{n \to -\infty} |x(n)|^{1/n} > 1. \qquad (2)$$

Definindo

$$r_1 = \lim_{n \to \infty} |x(n)|^{1/n} \qquad (3)$$

$$r_2 = \lim_{n \to -\infty} |x(n)|^{1/n} \qquad (4)$$

então as inequações (1) e (2) são equivalentes a

$$r_1 < |z| < r_2 \qquad (5)$$

ou seja, a transformada Z de uma sequência existe em uma região anular do plano complexo, definida pela inequação (5). Em alguns casos $r_1 = 0$ ou $r_2 \to \infty$.

Nota sobre a ROC da propriedade multiplicação por k:

Propriedade:

$$k\,x[k] \xrightarrow{\mathcal{Z}} -z\,\frac{dX(z)}{dz}$$

com a mesma ROC de $X(z)$.

<u>Demonstração da ROC</u>: Pelas equações (3) e (4) temos que a região de convergência de $X(z)$ é

$$r_1 < |z| < r_2 \,, \qquad \text{então}$$

$$r_1 = \lim_{k \to \infty} |x[k]|^{1/k}$$

$$r_2 = \lim_{k \to -\infty} |x[k]|^{1/k}.$$

Portanto, se a região de convergência de $\mathcal{Z}\{k\cancel{x}[k]\}$ é dada por

$$\tilde{r}_1 < |z| < \tilde{r}_2 \text{ , temos que}$$

$$\tilde{r}_1 = \lim_{k \to \infty} |k\, x[k]|^{1/k} = \lim_{k \to \infty} |k|^{1/k} \lim_{k \to \infty} |x[k]|^{1/k} = \lim_{k \to \infty} |x[k]|^{1/k} = r_1$$

$$\tilde{r}_2 = \lim_{k \to -\infty} |k\, x[k]|^{1/k} = \lim_{k \to -\infty} |k|^{1/k} \lim_{k \to -\infty} |x[k]|^{1/k} = \lim_{k \to -\infty} |x[k]|^{1/k} = r_2$$

o que demonstra que a ROC de $\mathcal{Z}\{k\,x[k]\}$ é a mesma de $X(z)$.

$\blacksquare$

Scanned by CamScanner

// Nota //

Cálculo $\lim_{k \to \infty} |k|^{1/k}$ leva a uma indeterminação do tipo $\sqrt[0]{\infty}$. Neste caso vamos reescrever a função para aplicarmos a regra de L'Hopital.

Seja $L = \lim_{k \to \infty} |k|^{1/k}$, calculando o logaritmo natural nos dois lados temos,

REGRA DA CADEIA

$$\ln(L) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\cancel{k}} \ln k = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando L'Hopital

$$\ln(L) = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

logo $\ln(L) = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$

$$\lim_{k \to \infty} |k|^{1/k} = 1$$